

Introduction to ”A characterization of the Shapley value for fair reordering problems”

R09323040 蘇柏睿

1 What is the question?

在已經有初始隊列 (例如事先抽號碼牌) 的排隊問題中，若每個人的等待成本不盡相同，是否可以找到更好的重新排序方式？

2 Why should we care about it?

在現實生活中，我們常需要排隊去取得某樣物品或服務。且常會有以抽號碼牌的方式來排序，也就是先到先贏 (FCFS)。但如果後到的人較急迫，則常會透過給錢的方式和先來的人換號碼牌，但該付多少錢才會是一個較公平的結果？這是一個需要思考的問題。

3 What is the authors' answer?

作者證明，一個重新排序規則滿足作者定義的一些公理 若且為若 在這規則下的，隊列是有效率的 (先服務急迫者)，且現金轉移是某個數，使得每個人的報酬為合作賽局中的 Shapley value。也就是說，可以透過 Shapley value 的概念，決定該轉移多少現金。

4 How did the authors get there?

作者建構一個排隊問題的模型。模型中，每個人有自己的等待成本與初始排隊位置，透過現金轉移的方式來重新排序。每個人的報酬取決於等待時間、等待成本與現金轉移。為了解決這個問題，作者首先透過定義一個合作賽局的方式，求出每個人的 Shapley value，再用一些公理 (例如 efficiency、individual rationality(IR) 等) 刻劃出作者認為一個**好的**重新排序規則該有的性質，最後證明出結果。此外，作者也透過非合作賽局 (談判) 的方式，得出玩家唯一的均衡報酬和合作賽局中的 Shapley value 一樣。

Real world example

現在 COVID-19 疫情嚴峻，大家都想要施打疫苗，但疫苗的數量不足，需要等待。
若已經事先安排好施打順序，後來才發現高風險族群 (例如疫情突然爆發的地區居民、長者等) 的施打順序較後面，政府該如何安排，使較無風險的人願意讓出自己的名額？

Notations

σ : 隊列，指出每一個人的排隊位置

σ^{\prec} : 事先排好的隊列

θ_i : agent i 的每單位時間等待成本

t_i : agent i 獲得的現金轉移 (可以是負數)

$u_i = -(\sigma_i - 1)\theta_i + t_i$: agent i 的效用函數

U_i : agent i 的淨報酬 (從初始位置換到後來的位置所增加的報酬)

$z = (\sigma, t)$: 分配，包含該如何安排隊列及現金轉移。